**التمرين رقم 1 :**

أ كتب الأعداد العقدية التالية على الشكل الجبري .

1) $(1-i)(1+i)$ ، 2) $(2-5i)(3+i)$

3) $(2-i)^2$ ، 4) $(1+i)(1-2i)(1+3i)$

5) $(2-i)^3$ ، 6) $\dfrac{(3+2i)(1+i)}{i-1}$

7) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$ ، 8) $\dfrac{2-3i}{1+i}+\dfrac{1-2i}{1-i}$

**التمرين رقم 2 :**

نعتبر : $f(z)=\dfrac{1+z+z^2+z^3}{1+z}\ ;(z\neq -1)$

1) أ حسب : $f(i)\ ;\ f(i-1)\ ;\ f(2+i)$

2) حل في C المعادلة : $f(z)=0$ .

**التمرين رقم 3 :**

حل في C المعادلة :

1) $(1+2i)z-(i-1)=i.z-3$ .

2) $z.(z+i)(1-i-z)=0$ .

3) $\dfrac{1+2i.z}{1+2z}=i.\dfrac{z-1}{z+3}$ ، 4) $(1-i).z=(2+i)^3$ .

5) $(1+i).z=(1-i)^4$ ، 6) $\left(\dfrac{2-i}{1-2i}\right).z=\dfrac{1+i}{1-3i}$ .

7) $\left(\dfrac{1-i}{2+i}\right).z=(2-3i)^2$ ، 8) $2.z-\bar{z}=3-6i$

9) $-i.\bar{z}+(2-3i).z=1$ .

10) $4.z^2+8.|z|^2-3=0$ .

**التمرين رقم 4 :**

حل في C المعادلة :

1) $z^2+4=0$ ، 2) $z^2-z+2=0$

3) $2.z^2+\sqrt{2}.z+1=0$

4) $4.z^2-12.z+25=0$ .

5) $z^3+2.z^2+2.z+1=0$ .

6) $z^3+3.z^2+4.z+4=0$ .

**التمرين رقم 5 :**

نعتبر :

$f(z):C\to C$

$z\to z^2+1$

1) أ $Im(f(z))$ و $Re(f(z))$ بدلالة $Re(z)$ و $Im(z)$ .

2) حدد الأعداد العقدية z حيث $f(z)$ عدد حقيقي .

**التمرين رقم 6 :**

نعتبر $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}\ ;(z\neq i)$ نضع : $z=x+.iy$ .

1) أ حسب الجزء الحقيقي و التخيلي ل $f(z)$ بدلالة x و y

2) حدد مجموعة الأعداد العقدية z حيث $Im(z)=0$ .

3) أ كتب z بدلالة $f(z)$ ثم أ جب على السؤال 2) .

**التمرين رقم 7 :**

1) أ نشئ في المستوى المنسوب إ لى م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

النقط : $A(-1+2.i)$ ، $B\left(\dfrac{1}{1+i}\right)$ ، $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}.i\right)$

2) حدد لحق المتجهات : $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC}$ .

**التمرين رقم 8 :**

نعتبر : $f(z)=\dfrac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}}\ ;\ (z\neq 1)$

1) أ حسب الجزء الحقيقي و التخيلي ل $f(z)$ بدلالة z

2) بين أ ن مجموعة النقط M(z) حيث f(z) عدد حقيقي هي مستقيم محروم من نقطة .

3) بين أ ن مجموعة النقط M(z) حيث f(z) تخيلي صرفا أ و منعدم .هي دائرة محرومة من نقطة , محددا معادلتها .

**التمرين رقم 9 :**

ليكن $z=x+i.y$ عدد عقدي مخالف ل-1 ,

و $f(z)=\dfrac{2.i.z-i}{z+1}$ . $(x\,;y\in IR)$

1) أ حسب $\overline{f(z)}\ ;Re(f(z))\ ;Im(f(z))\ ;|z|$ بدلالة x و y

2) حدد $E_1$ مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|f(z)|=1$

3) حدد $E_2$ مجموعة النقط $M(z)$ حيث f(z) تخيلي ص

4) حدد نقط تقاطع المجموعتين $E_1$ و $E_2$ .


cherifalix@hotmail.com
GSM :064865556

## التمرين رقم 10:

cherifalix@hotmail.com

حدد مجموعة النقط M(Z) حيث :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\right).Z+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\right).\overline{Z}+1=0$$

## التمرين رقم 11 :

حدد عمدة الأعداد العقدية التالية التي معيارها 1 :

1) $z=-1\ ;z=1\ ;z=i$ .

2) $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ z=-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

3) $z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.i\right)^3$

4) $z=\left(\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

## التمرين رقم 12 :

أ كتب على الشكل المثلثي الأعداد التالية :

1) $z=2.i\ ;\ z=-2.i\ ;z=-5\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ z=\sqrt{2}$ .

2) $z=1+i\ ;z=1-i\ ;\ z=i-\sqrt{3}$ .

3) $z=\sqrt{2}.\left(\frac{1+i}{1+i.\sqrt{3}}\right)$ .

4) $z=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i-1}\right)^{12}\ ,\ z=\left(\frac{i}{1-i}\right)^4$

5) $z=1-\cos(\theta)-i.\sin(\theta)$ .

6) $z=\sin(\theta)+2.i.\sin^2(\frac{\theta}{2})$ .

7) $z=\cos(\theta)+i.(1+\sin(\theta))\ ;\ \theta\in[0;2\pi[$ .

## التمرين رقم 13 :

أ كتب على الشكل الأسي الأعداد العقدية التالية :

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.i\ ;1-i.\sqrt{3}\ ;2-2.i$ .

2) $\sqrt{3}-i\ ;\ 5.(1+i)\ ;\ 2.\sqrt{3}.(i-\sqrt{3})$ .

3) $(1+i)^3\ ;(\sqrt{3}-i)^2\ ;(1+i.\sqrt{3})^6$ .

## التمرين رقم 14 :

أخطط مايلي :

1) $A(x)=\cos^3(x)\ ,\ B(x)=\sin^3(x)$ .

2) $A(x)=\sin^4(x)-3.\sin^2(x).\cos^2(x)$ .

3) $A(x)=\cos^3(x).\sin^3(x)\ ,\ B(x)=\sin^4(x)$

4) $A(x)=4.\cos^3(x)-3.\cos(x)$ .

5) $B(x)=3.\sin(x)-4.\sin^3(x)$ .

## التمرين رقم 15 :

1) أ – حدد الجدرين المربعين للعدد 3-4.i.

ب - حدد في المجموعة C حلي المعادلة :

$$Z^2-2.(3+i).Z+5+10.i=0$$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$.

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما 1+2.i و 5 .

بين أ ن المثلث OAB قائم الزاوية .

3) ليكن θ عمدة للعدد 1+2.i . أ كتب العدد $(1+2.i)^3$ .

على الشكل الجبري .ثم آستنتج $\cos(3\theta)$ .

## التمرين رقم 16:

I ) نعتبر ( E ) المعادلة التالية :

$$(E):z^3-4.(1-i).z^2+16.(1-i).z+64.i=0$$

1) تحقق من أ ن العدد -4.i حل للمعادلة ( E ) .

2) حل المعادلة ( E ) .

3) نعتبر العدد بحيث :

$$(k\in Z):z_k=\left(\frac{1}{4}+i.\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i.\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$$

أ تبث أ ن : $z_k=\frac{i}{2^{k-1}}.\sin(\frac{k.\pi}{3})$

ثم آستنتج أ ن : $z_{2001}=0$

II ) المستوى العقدي منسوب إ لى م.م.م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

لتكن A صورة العدد $z_A$ و النقطة B صورة العدد $z_B$

بحيث $z_A=2+2.i.\sqrt{3}$ و $z_B=2-2.i.\sqrt{3}$ .

1) أ نشئ النقطة C صورة العدد بحيث :

$z_C=\frac{3}{2}.z_A+z_B$ .

2) حدد عمدة $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ و آ ستنتج طبيعة المثلث ABC

**التمرين رقم 17:**

نعتبر العدد العقدي a حيث :

$$a = (\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i$$

1) أ - أحسب $a^2$

ب - حدد معيار و عمدة $a^2$ .

ج - آستنتج معيار و عمدة العدد العقدي a .

2) ليكن u العدد العقدي حيث : $u = \dfrac{a}{2+2.i}$

بين أن : $u = \cos(\frac{\pi}{6}) + i.\sin(\frac{\pi}{6})$

3) نعتبر في C المعادلة :

$$(E): Z^2 - i.(3.u^3+4.u^4).Z - 12.u^7 = 0$$

( Z هو المجهول )

أ – أوجد بدلالة u , حلي المعادلة ( E ) .

ب - أ كتب على الشكل المثلثي و على الشكل الجبري كلا من حلي المعادلة ( E ) .

**التمرين رقم 18 :**

لتكن E مجموعة الأعداد العقدية التي تخالف 1- و , f تطبيق من E نحو C بحيث : $f(z) = \dfrac{i.z-1}{(z+1)^2}$

I) نعتبر في E المعادلة : $(1)\quad f(z) = z$

1) بين أ ن المعادلة ( 1 ) تكافئ المعادلة :

$$z^3 + 2z^2 + (1-i).z + 1 = 0 \qquad (2)$$

2) بين أ ن المعادلة ( 2 ) تقبل حلا على شكل a.i بحيث a عدد حقيقي يجب تحديده .

3) حل في E المعادلة ( 1 ) .

II) في هذا الجزء نفترض أ ن : $|z| = 1$

و نضع : $f(z) = Z$

1) بين أ ن : $\overline{Z} = i.z.Z$ .

2) آستنتج أ نه إ ذا كان Z عددا عقديا حقيقيا فإ نه منعدم .

**التمرين رقم 19 :**

نعتبر في C المعادلة ( E ) التالية :

$$(E): \left(\frac{Z-i}{\overline{Z}+i}\right)^2 = 2.i\left|\frac{Z}{Z+3.i}\right|$$

1) بين أ ن Z يكون حلا للمعادلة( E ) إ ذا و فقط إ ذا كان

$$\left(\frac{Z-i}{\overline{Z}+i}\right)^2 = i \quad \text{و} \quad |Z+3.i| = 2.|Z|$$

( لا حظ أ ن: $\overline{Z-i} = \overline{Z}+i$ )

2) لتكن (ζ) مجموعة النقط M من المستوى العقدي ذات اللحق Z بحيث : $|Z+3.i| = 2.|Z|$

بين أ ن (ζ) دائرة مطلوب تحديد مركزها و شعاعها .

3) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوى العقدي ذات اللحق Z بحيث : $\left(\frac{Z-i}{\overline{Z}+i}\right)^2 = i$

بين أ ن : (Γ) هي آ تحاد مستقيمين بآستثناء نقطة مطلوب تحديدها .

4) آ ستنتج عدد حلول المعادلة ( E ).

**التمرين رقم 20:cherifalix@hotmail.com**

نعتبر في المجموعة C المعادلة التالية :

$$(E): z^2 - (1+\sqrt{3}).z + \frac{(2+\sqrt{3})-i}{2} = 0$$

1) أ – حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي 2.i .

ب - حل المعادلة ( E )

( نرمز للحلين $z_1$ و $z_2$ بحيث $Im(z_1) < 0$ )

2) أ – تحقق من أ ن : $z_2 = 1 + \overline{z_1}$

ب – أ كتب $z_1$ على الشكل المثلثي .

ج - بين أ ن :

$$z_2 = \left(2\cos(\frac{\pi}{12})\right)\left(\cos(\frac{\pi}{12}) + i.\sin(\frac{\pi}{12})\right)$$

3) المستوى منسوب إ لى م.م.م.م. $(O;\vec{u};\vec{v})$

لتكن A و B و C النقط التي أ لحاقها هي التوالي

$$a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.i \quad \text{و} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\text{و} \quad c = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.i$$

أ – بين أ ن : $AB = AC = \sqrt{2}$

ب- أ عط قياسا للزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ .

ج – آستنتج طبيعة المثلث ABC .

**التمرين رقم 21:**

المستوى منسوب إلى م.م.م.م $(O;\vec{u};\vec{v})$

لكل z من $C-\{-1;1\}$ نضع : $g(z) = \dfrac{z}{z^2-1}$

1) حدد على الشكل الجبري حلي المعادلة : $g(z) = i$

2) نضع : $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$ و $z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$ .

نعتبر في المستوى النقط : $M_1$ و$M_2$ و N . التي أ لحاقها على التوالي هي $z_1$ و$z_2$ و $\sqrt{3} - \frac{i}{2}$.

أ- بين أن النقط $M_1$ و $M_2$ و $N$ مستقيمية

ب – أ كتب كلا من العددين $z_1$ و $z_2$ على الشكل المثلثي .

ج- أ حسب $z_1^{60}+z_2^{60}$ .

3) أ – بين أ ن لكل $z$ من $C-\{-1;1\}$ .

$g(z) \Leftrightarrow (z+\bar{z})(|z|^2-1)=0$ تخيلي صرف .

ب- حدد في المستوى المجموعة ج للنقط $M(z)$ بحيث $g(z)$ عددا عقديا تخيليا صرفا .

## التمرين 22:

نعتبر في المجموعة $C$ الحدودية التالية :

$$P(z)=z^3-2(2+3.i)z^2-4.(1-5.i)z+16.(1-i)$$

1) بين أ ن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا حقيقيا $\alpha$ .

2) أوجد الأعداد العقدية $a$ و $b$ و $c$ بحيث يكون :

$$P(z)=(z-\alpha).(a.z^2+b.z+c)$$

3) حل في $C$ المعادلة : $P(z)=0$

## التمرين 23:

نعتبر في المجموعة $C$ الحدودية التالية :

$$P(z)=z^4+4z^3+8z^2+4z+7$$

1) تحقق من أ ن $i$ حل للمعادلة : $P(z)=0$ .

2) بين أ نه إ ذا كان $z_0$ حل للمعادلة $P(z)=0$ فإ ن $\overline{z_0}$ كذلك حل للمعادلة .

3) حدد جميع حلول المعادلة : $P(z)=0$ .

## التمرين 24:

نعتبر في المجموعة $C$ الحدودية التالية :

$$(\omega\in C)\ (E):z^2-(2+i.\omega)z+i.\omega-\omega+2=0$$

1) حدد بدلالة $\omega$ حلي المعادلة $(E)$ .

2) حدد $\omega$ بحيث يكون للمعادلة $(E)$ حل مزدوج .

3) حدد $\omega$ بحيث يكون الجذرين مترافقين .

## التمرين 25:

نعتبر في المجموعة $C$ الحدودية التالية :

$$P(z)=4.z^2+2.(i-4).z^2+3.(3-2.i)z-9+\frac{9}{2}.i$$

1) بين أ ن المعادلة : $P(z)=0$ تقبل حلا حقيقيا $\alpha$ يتم تحديده .

2) أ - حدد العددين العقديين $a$ و $b$ بحيث :

$$P(z)=(z-\alpha).(4.z^2+a.z+b)$$

ب- حل في $C$ المعادلة : $P(z)=0$

3) نضع : $\alpha$ و $z'$ و $z''$ حلول المعادلة (1) .

و لتكن $A(\alpha)$ و $M(z')$ و $M'(z'')$ صورها في المستوى العقدي .

بين أ ن المثلث $AMM'$ قائم الزاوية في النقطة $A$ .

## التمرين 26:

نعتبر في المجموعة $C$ المعادلة التالية :

$$(E): 2.z^2-(3+i).z+2=0$$

1) حدد $z_1$ و $z_2$ حلي المعادلة .

2) أ كتب $z_1$ و $z_2$ على الشكل المثلثي .

ثم آ ستنتج قيمة : $z_1^4+z_2^4$

## التمرين 27:

نعتبر في المجموعة $C$ المعادلة التالية :

$$(E):z^3+(3-i.\sqrt{3})z^2+2.(1-i.\sqrt{3})z-i\sqrt{3}=0$$

1) تحقق من أ ن 1- حل للمعادلة $(E)$ .

2) حدد الحلو ل الأخرى لهذه المعادلة .

3) أ عط الكتابة المثلثية لهذه الحلول .

4) لتكن $M_1$ و $M_2$ و $M_3$ صور هذه الحلول في المستوى العقدي .

بين أ ن المثلث $M_1M_2M_3$ متساوي الأضلاع .

## التمرين 28:

نعتبر العدد العقدي : $z=2\cos^2(\theta)+i.\sin(2\theta)$

حيث : $\left(\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$

1) حدد معيار و عمدة $z$ .

2) ا عط الكتابة الأسية ل $z$ .

## التمرين 29:

نعتبر العدد العقدي : $z=-\frac{\sqrt{2}}{16}(1+i)$

1) حدد معيار و عمدة $z$ .

2) آستنتج الجذور المكعبة ل $z$ .

**cherifalix@hotmail.com**
**GSM :064865556**

## التمرين 30:

1) أكتب على الشكل المثلثي الاعداد العقدية التالية :

$z_1 = 1 - i.\sqrt{3}$ , $z_2 = -3 + 3.i$ , $z_3 = \frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) أحسب : $z_1^{\ 6}$ و $z_2^{\ 4}$ و $z_3^{\ 12}$ .

## التمرين 31:

ليكن :

$z_1 = 4.\sqrt{2}(1-i)$ و $z_2 = \frac{1}{2}.(1+i\sqrt{3})$ و $z = \frac{z_1}{z_2}$

1) أكتب $z_1$ و $z_2$ و $z$ على الشكلين المثلثي و الجبري

2) أستنتج قيمتي : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ .

## التمرين 32:

أكتب العددين $1+i.\sqrt{3}$ و $1-i.\sqrt{3}$ على الشكل المثلثي

ثم أحسب : $\left(1+i.\sqrt{3}\right)^n + \left(1-i.\sqrt{3}\right)^n$

## التمرين 33 :

نعتبر في المجموعة C المعادلة :

$$(E_n) : z^n = (i.z - 2i)^n$$

حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

1) حل في C المعادلة $(E_2)$ .

2) أ – أكتب كلا من العددين $1+i.\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}-i$ على الشكل المثلثي .

ب – أستنتج أن العدد $1+i.\sqrt{3}$ هو حل للمعادلة $(E_{12})$ .

3) أ – في المستوى العقدي , حدد مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $|z| = |i.z - 2i|$

ب- أستنتج أن جميع حلول المعادلة $(E_n)$ تكتب على الشكل : $1 + a.i$ حيث $a \in IR$ .

## التمرين 34 :

ليكن m عدد عقدي غير منعدم , نعتبر في C المعادلة :

$$(E) : z^2 - (3m-2)z + 2m^2 - 4m.i = 0$$

1) حل المعادلة $(E)$ .

2) نعتبر في هذا السؤال $m = 1+i$ و ليكن $z_1$ و $z_2$ حلي المعادلة $(E)$ بحيث $|z_1| \langle |z_2|$ .

أ – أكتب على الشكل المثلثي كلا من $z_1$ و $z_2$ .

ب – تحقق من أن $(-z_1)$ هو جذرمكعب للعدد $z_2$ , ثم أستنتج على الشكل الجبري . الجذرين المكعبين الآخرين للعدد $z_2$ .

3) المستوى منسوب إلى م.م.م.م. لتكن A و B و C النقط التي ألحاقها على التوالي : $m-2.i\ ;\ 2.m\ ;i$ و نفترض أن m ليس تخيلي صرفا .

أ – بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية .

ب- خارج المثلث ABC ننشئ النقطة D بحيث يكون المثلث BCD متساوي الساقين و قائم الزاوية في D .

ليكن d لحق النقطة D .

بين أن :

$$d = \frac{3.m - i.m + 2 - 2.i}{2}$$

أو

$$d = \frac{3.m + i.m - 2 - 2.i}{2}$$

ج – حدد m لكي يكون الرباعي ABCD مربعا .

## التمرين 35 :

ليكن $Z_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i.\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

نضع $\alpha = Z_0 + Z_0^4$ و $\beta = Z_0^2 + Z_0^3$

1 ) أحسب $Z_0^5$ .

2) بين أن $\alpha$ و $\beta$ هما حلي المعادلة :

$$(E) : Z^2 + Z - 1 = 0$$

3) حدد $\alpha$ بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .

4) حل المعادلة $(E)$ ثم أستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .

## التمرين 36:

المستوى العقدي P منسوب إلى م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) نعتبر التطبيق $\varphi$ المعرف على المجموعة *C بما يلي

$$(\forall z \in C^*)\ \varphi(z) = \frac{1}{2}.\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

أ – حل في C المعادلة : $\varphi(z) = i$

cherifalix@hotmail.com
GSM :064865556

ب – نضع $z = r.e^{i.\theta}$ حيث $r > 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$
عبر بدلالة r و $\theta$ عن الجزء الحقيقي و عن الجزء التخيلي للعدد العقدي $\varphi(z)$ .

2) نعتبر التطبيق f من *P نحو P الذي يربط كل نقطة $M(z)$ ( مع $z \neq 0$ ) بالنقطة $M(\varphi(z))$ .
لتكن $(C_r)$ الدائرة التي مركزها O و شعاعها r.

أ ) بين أ نه :
$$M(z) \in (C_r) \Leftrightarrow \exists \theta \in [0;2\pi[ : z = r.e^{i\theta}$$

ب) بين أ ن صورة الدائرة $(C_r)$ بالتطبيق f توجد ضمن مخروطي $(E_r)$ يجب تحديد معادلة مختصرة له .
ثم آ ستنتج أ ن $(E_r)$ آ هليليج بؤرتاه $F(1)$ و $F'(-1)$

3) لتكن $M(z)$ نقطة من $(E_r)$ و $M'(z')$ نقطة من المستوى P بحيث $z'^2 + z^2 = 1$

أ ) بين أن : $OM'^2 = MF.MF'$
( لا حظ أ ن : $z'^2 = (1-z).(1+z)$ )

ب) بين أ ن :
$$2.\arg(z') \equiv \arg(1-z) + \arg(-1-z) + \pi [2\pi]$$

---

## التمرين 37 :

نعتبر في C المعادلة :
$$(E) : m.z^4 + (m-1).z^2 - i = 0$$
حيث m بارامتر .

1) نفترض أ ن m عدد حقيقي حل المعادلة $(E)$ .

2) نفترض أ ن m عدد عقدي معياره $\rho$ و عمدته $\theta$ , حل المعادلة $(E)$ .

3) حدد المجموعة $(\zeta)$ مجموعة الأ عداد ( الحقيقية أ و العقدية ) التي من أ جلها جميع حلول المعادلة $(E)$ لها نفس المعيار .

---

## التمرين 38 :

بين أ نه : $\forall z \in C :$
$$\begin{cases} Im(z) \geq 0 \Rightarrow z = \left(\sqrt{\dfrac{|z| + Ré(z)}{2}} + i.\sqrt{\dfrac{|z| - Ré(z)}{2}}\right)^2 \\ Im(z) \geq 0 \Rightarrow z = \left(\sqrt{\dfrac{|z| + Ré(z)}{2}} - i.\sqrt{\dfrac{|z| - Ré(z)}{2}}\right)^2 \end{cases}$$

**cherifalix@hotmail.com**
**GSM :064865556**

## التمرين 39 :

بين أ نه :
$$\forall (z;z') \in C^2 : \quad z.\overline{z'} = \left|\frac{z+z'}{2}\right|^2 - \left|\frac{z-z'}{2}\right|^2 + i.\left|\frac{z+i.z'}{2}\right|^2 - i.\left|\frac{z-i.z'}{2}\right|^2$$

---

## التمرين 40 :

بين أ نه :

(1 $\forall (z_1, z_2) \in C^* \times C :$
$$\left(|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow (\exists \lambda \in IR / z_2 = i.\lambda.z_1)\right)$$

(2 $\forall (z_1, z_2) \in C^2 :$
$$\left(\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ 1 + z_1.z_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1.z_2} \in IR\right)$$

---

## التمرين 41 :

حل في C المعادلات التالية :

(1 $z^4 - (5 - 14.i).z^2 - 2(5.i + 12) = 0$

(2 $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \dfrac{z+i}{z-i} + 1 = 0$

(3 $(z+i)^n = (z-i)^n \ , n \in IN, n \geq 2$

(4 $z + \overline{z} + j.(z+1) + 2 = 0$

---

## التمرين 42 :

بين أ نه : $\forall z \in C :$
$$\frac{|Ré(z) + Im(z)|}{\sqrt{2}} \leq z \leq |Ré(z)| + |Im(z)|$$

---

## التمرين 43 :

بين أ نه : $\forall n \in IN^*, \forall \theta \in IR$
$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{2.k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{2.k\pi}{n}\right) = 0$$

---

## التمرين 44 :

حدد : $\left\{ n \in IN /, \left(\sqrt{3} + i\right)^n \in IR \right\}$

---

## التمرين 45 :

حد د مجموعة النقط M ذات اللحق z في كل حالة :

(1 $\dfrac{z - 1 - i}{z + 1} \in IR$ .

ب – نضع $z=r.e^{i.\theta}$ حيث $r\rangle 0$ و $0\le\theta\le2\pi$
عبر بدلالة r و $\theta$ عن الجزء الحقيقي و عن الجزء التخيلي للعدد العقدي $\varphi(z)$ .

2) نعتبر التطبيق f من P* نحو P الذي يربط كل نقطة M(z) ( مع $z\neq0$ ) بالنقطة $M(\varphi(z))$ .

لتكن $(C_r)$ الدائرة التي مركزها O و شعاعها r.

أ ) بين أ نه :

$$M(z)\in(C_r)\Leftrightarrow\exists\theta\in[0;2\pi[:z=r.e^{i\theta}$$

ب) بين أ ن صورة الدائرة $(C_r)$ بالتطبيق f توجد ضمن مخروطي $(E_r)$ يجب تحديد معادلة مختصرة له .

ثم آ ستنتج أ ن $(E_r)$ آ هليليج بؤرتاه $F(1)$ و $F'(-1)$

3) لتكن M(z) نقطة من $(E_r)$ و $M'(z')$ نقطة من المستوى P بحيث $z'^2+z^2=1$

أ ) بين أن : $OM'^2=MF.MF'$

( لا حظ أ ن : $z'^2=(1-z).(1+z)$ )

ب) بين أ ن :

$$2.\arg(z')\equiv\arg(1-z)+\arg(-1-z)+\pi[2\pi]$$

## التمرين 37 :

نعتبر في C المعادلة :

$$(E):m.z^4+(m-1).z^2-i=0$$

حيث m بارامتر .

1) نفترض أ ن m عدد حقيقي حل المعادلة $(E)$ .

2) نفترض أ ن m عدد عقدي معياره $\rho$ و عمدته $\theta$ , حل المعادلة $(E)$ .

3) حدد المجموعة $(\zeta)$ مجموعة الأعداد ( الحقيقية أ و العقدية ) التي من أ جلها جميع حلول المعادلة $(E)$ لها نفس المعيار .

## التمرين 38 :

بين أ نه : $\forall z\in C:$

$$\begin{cases}Im(z)\ge0\Rightarrow z=\left(\sqrt{\dfrac{|z|+Ré(z)}{2}}+i.\sqrt{\dfrac{|z|-Ré(z)}{2}}\right)^2\\ Im(z)\ge0\Rightarrow z=\left(\sqrt{\dfrac{|z|+Ré(z)}{2}}-i.\sqrt{\dfrac{|z|-Ré(z)}{2}}\right)^2\end{cases}$$

cherifalix@hotmail.com
GSM :064865556

## التمرين 39 :

بين أ نه :

$$\forall(z;z')\in C^2:\quad z.\overline{z'}=\left|\frac{z+z'}{2}\right|^2-\left|\frac{z-z'}{2}\right|^2+i.\left|\frac{z+i.z'}{2}\right|^2-i.\left|\frac{z-i.z'}{2}\right|^2$$

## التمرين 40 :

بين أ نه :

1) $\forall(z_1,z_2)\in C^*\times C:$
$$\left(|z_1+z_2|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow(\exists\lambda\in IR/z_2=i.\lambda.z_1)\right)$$

2) $\forall(z_1,z_2)\in C^2:$
$$\left(\begin{cases}|z_1|=|z_2|=1\\1+z_1.z_2\neq0\end{cases}\Rightarrow\frac{z_1+z_2}{1+z_1.z_2}\in IR\right)$$

## التمرين 41 :

حل في C المعادلات التالية :

1) $z^4-(5-14.i).z^2-2(5.i+12)=0$

2) $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2+\dfrac{z+i}{z-i}+1=0$

3) $(z+i)^n=(z-i)^n\ ,\ n\in IN,n\ge2$

4) $z+\overline{z}+j.(z+1)+2=0$

## التمرين 42 :

بين أ نه : $\forall z\in C:$

$$\frac{|Ré(z)+Im(z)|}{\sqrt2}\le z\le|Ré(z)|+|Im(z)|$$

## التمرين 43 :

بين أ نه : $\forall n\in IN^*,\forall\theta\in IR$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{2.k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{2.k\pi}{n}\right)=0$$

## التمرين 44 :

حدد : $\left\{n\in IN\ /,\ \left(\sqrt3+i\right)^n\in IR\right\}$

## التمرين 45 :

حد د مجموعة النقط M ذات اللحق z في كل حالة :

1) $\dfrac{z-1-i}{z+1}\in IR$ .

2) O مركز تعا مد المثلث المكون من النقط ذا ت اللواحق $z, z^2, z^3$ .
3) النقط ذا ت اللواحق $1+i.z\ ,1+i\ ,z+i\ ,1+i$ مستقيمية
4) النقط ذا ت اللواحق $j.z\ ,z\ ,j$ مستقيمية .
5) النقط ذا ت اللواحق $z\ ,z^2\ ,z^5$ مستقيمية .
6) النقط ذا ت اللواحق $z\ ,z^2\ ,z^3$ تكون مثلث قائم زاوية
7) النقط ذا ت اللواحق $1, z, \frac{1}{z}, 1-z$ متداورة .
8) النقط ذا ت اللواحق $i, z, i.z$ تكون مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في i.

## التمرين 46 :

نعتبر النقطة M التي لحقها : $m = a + i.b$ حيث : $(a \in IR$ و $b \in IR)$
لتكن المعادلة :

$$z^3 + (2-i).z^2 + (m^2 + 1 - 2.i)z - i.(1+m^2) = 0$$

1) تأكد أن i حلا لهذه المعادلة ثم أ وجد حليها الآخرين .
2) ما هي مجموعة النقط M ليكون للمعادلة على الاقل حلان لهما نفس المعيار . آ رسم هذ ه المجموعة .

## التمرين 47 :

ليكن $z = x + i.y$ $(x \in IR$ و $y \in IR)$ عددا عقديا
و ليكن : $Z = \frac{2}{3}.z - \frac{1}{3}.\bar{z} - 1$

M هي صورة z في المستوى العقدي :
حدد في كل حالة مجموعة النقط M و آ رسمها :
1) $|Z| = 1$ , 2) $Ré(Z^2) = 1$ , 3) $Im(Z^2) = 1$

## التمرين 48 :

نعتبر العددين العقديين z و Z بحيث :

$$z = 2.\cos^2(\theta) + i\sin^2(\theta) \quad \text{و} \quad Z = \frac{1}{z^2}$$

حيث : $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

لتكن m و M صورتي z وZ في المستوى العقدي .
1) أ حسب معيار و عمدة z و آ ستنتج معيار و عمدة Z .
بر هن أ ن : $Z = \frac{1}{4}.(1 - tg^2(\theta)) - \frac{1}{2}.i.tg(\theta)$
2) أ – بر هن على أ ن m تنتمي إ لى المنحنى $(\omega)$ الذي معادلته $x^2 + y^2 - 2.x = 0$ .ما هي طبيعة آ رسمه .
ب – بر هن على أ ن M تنتمي إ لى المنحنى $(\Omega)$ الذي.

معادلته $4.x + 4.y^2 = -1$ ما هي طبيعة آ رسمه .

## التمرين 49 :

1) ليكن $u = a + b.i$ عددا عقديا حيث : $(a \in IR$ و $b \in IR)$
أ ) كيف يجب آ ختيار a و b ليكون $\arg(u) = \frac{\pi}{4}$ ؟
ب ) كيف يجب آ ختيار a و b ليكون $|u| = \sqrt{2}$؟
2) ليكن m عدد عقدي : نضع $m = \alpha + i.\beta$ حيث : $\beta \in IR$ و $\alpha \in IR)$
لتكن M صورة العدد العقدي .
حل المعادلة في C .

$$(E) \quad z^2 - (2+i.m).z + i.m + 2 - m = 0$$

أ حد الحلين غير مرتبط بالعدد m , أ حسب معياره و عمدته .الحل الآ خر مرتبط بالعدد m , أ حسبه بدلالة و
3) أ – نعتبر قيم البارامتر m بحيث يكون لحلي المعادلة ( E ) نفس المعيار .
أ وجد في هذه الحالة المجموعة ( C ) للنقط M , آ رسمها
ب ) نعتبر قيم البارامتر m بحيث يكون لحلي المعادلة ( E ) نفس العمدة , بر هن على أ ن مجموعة النقط M هي نصف $(\Delta)$ مستقيم آ رسمه .
ج ) بر هن على أ نه توجد قيمة وحيدة m بحيث يكون للمعادلة ( E ) حل مزدوج .
أ وجد النتيجة السابقة مباشرة حسابيا .

## التمرين 50 :

1)حل المعادلة في C .

$$z^2 - \lambda.(1+2.i).z + 2.i.\lambda^2 = 0$$

$\lambda$ بارامتر عقدي غير منعدم .
$z_1$ و $z_2$ هما حلا المعادلة و $M_1$ و $M_2$ هما صورتاهما في المستوى العقدي .
2) أ حسب $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ و آ ستنتج منه أ ن المثلث $OM_1M_2$ المتغير يبقى قائم الزاوية في O عندما يتغير $\lambda$ .
3) أ – أ حسب معيار و عمدة العددين $z_1$ و $z_2$ بدلالة معيار و عمدة $\lambda$.
ب – نفترض أ ن $\lambda$ يتغير و هو محتفظ بمعيار ثابت $r\rangle 0$ ما هي مجموعتي النقطتين $M_1$ و $M_2$ .آ رسم هاتين المجموعتين بأ خذك $r = 2$ .
ج – نفترض أ ن $\lambda$ يتغير و هو محتفظ بعمدة ثابت $\alpha$

$\alpha \in ]-\pi,\pi]$ ما هي مجموعتي النقطتين $M_1$ و $M_2$

آ رسم هاتين المجموعتين بأ خذك $\alpha = \frac{\pi}{3}$

## التمرين 51 :

1) أ كتب على الشكل المثلثي : $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

2) حل المعادلة : $z^8 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

## التمرين 52 :

نعتبر التطبيق f في C المعرف بما يلي:

$$f(z) = z^3 + 4.\bar{z}$$

1) نضع: $z = x + i.y$ $(x \in IR$ و $y \in IR)$

النقطة M هي صورة z في المستوى العقدي .

أ – أ كتب f(z) بدلالة x و y على الشكل الجبري .

ب- حدد المجموعة (E) للنقط M بحيث يكون f(z) عددا حقيقيا .

ج – حدد المجموعة (F) للنقط M بحيث يكون f(z) عددا تخيليا صرفا.

ه- آ ستعمل الصيغة الجبرية للعدد f(z) لحل المعادلة :

$$f(z) = 0$$

د – آ رسم صور الحلين في المستوى العقدي و آ رسم المجموعتين (E) و (F) .

2) ليكن التطبيق g من C* إ لى C المعرف بما يلي :

$$g(z) = z^2 + \alpha.\frac{\bar{z}}{z} \quad , \quad \alpha \in IR^{*+}$$

أ – نضع : $z = \sqrt{\alpha}.(\cos(\theta) + i.\sin(\theta))$

بر هن على أ ن : $g(z) = 2.\alpha.\cos(2\theta)$

ب- حدد عمدة z ليكون z حلا للمعادلة : $g(z) = 0$

ج- آ ستنتج حلول المعادلة : $g(z) = 0$

## التمرين 53 :

نعتبر التطبيق φ من $C - \{-1\}$ إ لى C المعرف بما يلي

$$\varphi(z) = \frac{i.z - 1}{(z+1)^2}$$

I) حل المعادلة : $\varphi(z) = z$

علما أ ن إ حدى حلولهاتخيلي صرفا .

II) نفترض في هذا السؤال أ ن : $|z| = 1$

1) نضع : $\varphi(z) = Z$

ب – آ ستنتج أ نه إ ذا كا ن Z حقيقيا فإ نه منعدما .

2) نضع : $z = \cos(\theta) + i.\sin(\theta)$ $\theta \in ]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

أ – تأ كد من أ ن :

$$1 + \sin(\theta) = 2.\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos(\theta) = 2.\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

ب – أ كتب العددين i.z-1 و z+1 على الشكل المثلثي .

ج- آ ستنتج كتابة Z على الشكل المثلثي .

## التمرين 54 :

1) حل المعادلة في C : $Z^{12} = 1$

ثم أ كتب حلولها على الشكل المثلثي

2) u عدد عقدي أ حسب : $1 + u + u^2 + .... + u^n$

و آ ستنتج حلول المعادلة: $Z^8 + Z^4 + 1 = 0$

## التمرين 55 :

نعتبر اللمعادلة : $z^4 = 1 + i.\sqrt{3}$ : $z \in C$

1) حل المعادلة ثم أعط الشكل المثلثي لكل حل من حلولها.

2) أ عط الشكل الجبري لكل جذر من الجذرين المربعين للعدد : $u = i + \sqrt{3}$

3) نضع : $v = \sqrt{\frac{2.\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} + i.\sqrt{\frac{2.\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

أ عط الشكل الجبري للعدد $v^2$

و آ ستنتج أ ن : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4) المستوى P منسوب إ لى م.م.م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ .

نعتبر التحويل S من P نحو P الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z = (1 + i.\sqrt{3}).z - \sqrt{3}$

حدد طبيعة $(\Gamma)$ مجموعة النقط M من P بحيث :

$$\|\overrightarrow{OM'}\| = \sqrt{3}.\|\overrightarrow{OM}\|$$

## التمرين 56 :

نعتبر المعادلة :

$$P(Z) = z^3 + (1 + 3.ie^{i\theta})z^2 + [1 + i.(1 + 3e^{i\theta})]z + (3.i - 3).e^{i\theta}$$

حيث θ عدد حقيقي و $z \in C$ .

1) بين أ ن $z_1 = -3.e^{i\theta}$ حل للمعادلة :

أ – برهن على أن : $\overline{Z} = i.z.Z$



$\alpha \in ]-\pi,\pi]$ ما هي مجموعتي النقطتين $M_1$ و $M_2$

آ رسم هاتين المجموعتين بأ خذك $\alpha = \frac{\pi}{3}$

## التمرين 51 :

1) أ كتب على الشكل المثلثي : $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

2) حل المعادلة : $z^8 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

## التمرين 52 :

نعتبر التطبيق f في C المعرف بما يلي:

$$f(z) = z^3 + 4.\overline{z}$$

1) نضع: $z = x + i.y$ $(y \in IR$ و $x \in IR)$

النقطة M هي صورة z في المستوى العقدي .

أ – أ كتب f(z) بدلالة x و y على الشكل الجبري .

ب- حدد المجموعة (E) للنقط M بحيث يكون f(z) عددا حقيقيا .

ج – حدد المجموعة (F) للنقط M بحيث يكون f(z) عددا تخيليا صرفا.

ه- آ ستعمل الصيغة الجبرية للعدد f(z) لحل المعادلة :

$$f(z) = 0$$

د – آ رسم صور الحلين في المستوى العقدي و آ رسم المجموعتين( E ) و ( F ) .

2) ليكن التطبيق g من C* إ لى C المعرف بما يلي :

$$\alpha \in IR^{*+} \quad , \quad g(z) = z^2 + \alpha.\frac{\overline{z}}{z}$$

أ – نضع : $z = \sqrt{\alpha}.(\cos(\theta) + i.\sin(\theta))$

برهن على أ ن : $g(z) = 2.\alpha.\cos(2\theta)$

ب- حدد معيار z ليكون z حلا للمعادلة : $g(z) = 0$

ج- آ ستنتج حلول المعادلة : $g(z) = 0$

## التمرين 53 :

نعتبر التطبيق φ من $C - \{-1\}$ إ لى C المعرف بما يلي

$$\varphi(z) = \frac{i.z - 1}{(z+1)^2}$$

I) حل المعادلة : $\varphi(z) = z$

علما أ ن إ حدى حلولهاتخيلي صرفا .

II) نفترض في هذا السؤال أ ن : $|z| = 1$

ب – آ ستنتج أ نه إ ذا كا نZ حقيقيا فإ نه منعدما .

2) نضع : $z = \cos(\theta) + i.\sin(\theta)$ $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

أ – تأ كد من أ ن :

$$1 + \sin(\theta) = 2.\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos(\theta) = 2.\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

ب – أ كتب العددين i.z-1 و z+1 على الشكل المثلثي .

ج- آ ستنتج كتابة Z على الشكل المثلثي .

## التمرين 54 :

1) حل المعادلة في C : $Z^{12} = 1$

ثم أ كتب حلولها على الشكل المثلثي

2) u عدد عقدي أ حسب : $1 + u + u^2 + .... + u^n$

و آ ستنتج حلول المعادلة: $Z^8 + Z^4 + 1 = 0$

## التمرين 55 :

نعتبر اللمعادلة : $z \in C \;:\; z^4 = 1 + i.\sqrt{3}$

1) حل المعادلة ثم أعط الشكل المثلثي لكل حل من حلولها.

2) أ عط الشكل الجبري لكل جذر من الجذرين المربعين للعدد : $u = i + \sqrt{3}$

3) نضع : $v = \sqrt{\frac{2.\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} + i.\sqrt{\frac{2.\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

أ عط الشكل الجبري للعدد $v^2$

و آ ستنتج أ ن : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4) المستوى P منسوب إ لى م.م.م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ .

نعتبر التحويل S من P نحو P الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة$M'(z')$ بحيث : $z = (1 + i.\sqrt{3})z - \sqrt{3}$

حدد طبيعة $(\Gamma)$مجموعة النقط M من P بحيث :

$$\|\overrightarrow{OM'}\| = \sqrt{3}.\|\overrightarrow{OM}\|$$

## التمرين 56 :

نعتبر المعادلة :

$$P(Z) = z^3 + (1 + 3.ie^{i\theta})z^2 + [1 + i.(1 + 3e^{i\theta})]z + (3.i - 3).e^{i\theta}$$

حيث θ عدد حقيقي و $z \in C$ .

1) نضع : $\varphi(z) = Z$

أ – برهن على أن : $\overline{Z} = i.z.Z$

1) بين أن $z_1 = -3.e^{i\theta}$ حل للمعادلة :

| الأستاذ : علي الشريف الخميسات | تمارين درس الأعداد العقدية ص 11 www.madariss.fr | دروس الدعم و التقوية قسم : الثانية باكالوريا علوم رياضية |
|---|---|---|

$(E): P(z) = 0 \; ; z \in C$

2) أ – حدد العددين العقديين a و b بحيث :

$$\forall z \in C : P(z) = \left(z + 3.i.e^{i\theta}\right)\left(z^2 + a.z + b\right)$$

ب – ليكن $z_2$ و $z_3$ الحلين الآخرين للمعادلة $(E)$ .

حدد $z_2$ و $z_3$ ( $z_2$ هو الحل التخيلي الصرف )

3) أ – أكتب $z_1 ; z_2 ; z_3$ على الشكل المثلثي .

ب – نضع $\theta = \frac{\pi}{10}$ حدد الشكل الجبري للعدد العقدي $\alpha$ حيث : $\alpha = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5$

## التمرين 57 :

المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ .

نعتبر المعادلة : $(E): z^2 - 2.z + \frac{1}{\cos^2(\theta)} = 0$

حيث $\theta$ بارامتر حقيقي من المجال $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ .

1) أ – حل المعادلة $(E)$.

ب – ليكن $z_1$ و $z_2$ حلي المعادلة $(E)$ حيث : $\text{Im}(z_1) = \tan(\theta)$

أكتب $z_1$ و $z_2$ على الشكل المثلثي .

2) لتكن $M_1$ و $M_2$ على التوالي صورتي $z_1$ و $z_2$ في المستوى العقدي. بين أن المثلث $OM_1M_2$ متساوي الساقين رأسه O .

3) ليكن $n \in IN^*$. نعتبر المعادلة :

$$(E_1): z^{2.n} - 2.z^n + \frac{1}{\cos^2(\theta)} = 0$$

حدد حلول المعادلة $(E_1)$ على الشكل المثلثي .

## التمرين 58 :

نعتبر المعادلة :

$$(E): z^2 + 2.\cos(\theta).(1+\cos(\theta)).z + (1+\cos(\theta))^2 = 0$$

حيث $\theta$ بارامتر حقيقي من المجال $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ .

1) حل المعادلة $(E)$ ثم أعط الشكل المثلثي لحليها بدلالة $\theta$

2) حدد على الشكل المثلثي بدلالة $\theta$ الجذرين المربعين

$$a = 2.\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).(-\cos(\theta) + .i\sin(\theta))$$

3) آستنتج على الشكل المثلثي بدلالة $\theta$ الجذرين المربعين $z_3$ و $z_4$ للعدد $\overline{a}$ .

4) نضع لكل n من IN :

$$S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n + z_4^n$$

5) بين أن لكل p منIN :

$$S_{2.p} = (-1)^p.2^{p+2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{2p}.\cos(p\theta)$$

و $S_{2.p+1} = 0$

## التمرين 60 :

المستوى P منسوب إلى م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

نعتبر في C المعادلة :

$$(E_\theta): z^2 - (1 + i\sin 2\theta)z + \frac{1}{2} i \sin 2\theta = 0$$

حيث $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ .

1) حل في C المعادلة $(E_\theta)$ و أعط الحل المزدوج.

2) لتكن M' و M'' صورتي الحلين z' و z'' و I منتصف $[M'M'']$.

a.ما هي مجموعة النقط I عندما يتغير $\theta$ في $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ .

b.برهن على أن مجموعة النقطتين M' و M'' هي دائرة يجب تحديدها.

c. برهن أنه إذا كان $M' \neq M''$ فإن المستقيم $(M'M'')$ له اتجاه غير مرتبط بقيم $\theta$ . d. $\theta$ معلوم آستنتج مما سبق طريقة بسيطة لإنشاء I و M' و M'' .

## التمرين 61 :

نعتبر $f_a$ التطبيق من$C - \{a\}$ نحو $C - \{a\}$ المعرف بمايلي : $f_a(z) = \frac{az}{z-a}$ حيث $a \in C^*$

1) بين أن :

$$f_a(z) \in i\ IR \Leftrightarrow |z|^2 \ R_e(a) = |a|^2 \ R_e(z)$$

2) ليكن z من $C - \{a\}$ نضع $|z - a| = r$

و $\arg(z-a) \equiv \theta[2\pi]$

للعدد العقدي $z_1$ و $z_2$ :

احسب $|f_a(z)-a|$ بدلالة r و $|a|$ و $\arg(f_a(z)-a)$ بدلالة θ و arg a .



3) نضع فيما يلي : $a=-1+i$ و نعتبر في المستوى (P) المنسوب إلى م.م.م.م $(O,\vec{u},\vec{v})$ المجموعات التالية :

$$(\sigma)=\{M(z)/|f_a(z)-a|=2\}$$

$$(E)=\{M(z)/f_a(z)\in i\,IR\}$$

$$(D)=\left\{M(z)/\arg(f_a(z)-a)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]\right\}$$

أ- حدد كلا من (E) و (σ) و بين أن (D) نصف مستقيم طرفه A(a) محروم من النقطة A(a) محددا معادلة ديكارتية له.

ب-ليكن $z_\theta$ من $C-\{a\}$ و النقطة B ذات اللحق $z_\theta$ بحيث B تنتمي إلى $(D)\cap(\sigma)$

اكتب $f_a(z_\theta)$ على الشكل الجبري ثم اشتنتج $z_\theta$ .

ج-أنشيء (σ) و (E) و (D) في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

---

## ✍التمرين 62 :

I ) نعتبر المعادلة (E) التالية:

$$(1+i\,z)^3(1-i\tan\alpha)=(1-i\,z)^3(1+i\tan\alpha)$$

بحيث $z\in C$ و α عدد حقيقي من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

1)ليكن $z_0$ حلا للمعادلة (E).

أثبت أن $|1+i\,z_0|=|1-i\,z_0|$ و أستنتج أن $z_0$ عدد حقيقي .

2)أ-أ عط الشكل المثلثي للعدد العقدي: $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$

ب- ليكن z عددا حقيقيا .نضع $z=\tan\varphi$ حيث φ عدد حقيقي من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ .

بين أن المعادلة(E) تكافئ معادلة (E ') ذات المجهول φ ثم حل المعادلة(E ').

ج- حل المعادلة(E)

II )المستوى العقدي P منسوب إلى م.م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ .

1) نعتبر التحويل $S_U$ من P نحو P الذي يربط كل نقطة M(z) بالنقطة M'(z') بحيث : $z'=u\,z$

متعامدتان.

2) ليكن u و u' عددين عقديين بحيث $u=1+i\,k$ و $u'=1+i\,k'$ $\left((k,k')\in IR^2\right)$

أ-أعط طريقة هندسية لإ نشاء M'' انطلاقا من النقطين المعلومتين K(u) و K'(u') في الحالة $k\neq k'$ .

ب-حدد- (Γ) مجموعة النقط M'' في الحالة التي يكون فيها k و k’ متساويين ويتغيران في IR .أنشيء(Γ) .

---

## ✍التمرين 63 :

نعتبر النقطتين A(i) و A'(−i) و f التطبيق من $C-\{i\}$ نحو C و المعرف كما يلي: $f(z)=\frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$

و F تطبيق من $P-\{A\}$ نحو P يربط كل نقطة M(z) بالنقطة M'(z') حيث : $z'=f(z)$

1(a - أثبت أن: $|z'|=|z|$

و $\arg z'\equiv-\arg z+2\arg(z-i)(2\pi)$ إذا كان $z\neq0$ و $z\neq i$ (نلاحظ أن z-i و $\bar{z}+1$ مترافقان ).

b)بين أن إذاكان $|z|=1$ فإن $f(z)=-i$

2(a )حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F.

b) ماهي مجموعة النقط M(z) حيث تكون $f(z)\in iIR$ ؟

3)بي $z'+i=\frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$ و $z'-z=\frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$ .

b - استنتج أن المتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ .

---

## ✍التمرين 64 :

ليكن u عددا عقديا غير منعدم و j العدد العقدي بحيث

$$j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نضع $u=[r,\theta]$ و $z_1=uj$ و $z_2=ui$

1)اكتب $z_1$ و $z_2$ على الشكل المثلثي.

2) نضع $Z=\frac{z_1+z_2}{z_1+z_2}$

أ- حدد معيار و عمدة العدد العقدي

$\bar{j}-i$ نأ خذ : $\left(\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$

u) عدد عقدي بحيث $R_e(u)=1$ ( $R_e(u)$ : الجزء الحقيقي للعدد u.

حدد طبيعة $S_U$ وبين أن المتجهتين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{MM'}$

ب- استنتج الشكل المثلثي للعدد Z بدلالة r و θ

3)أ- حدد قيم θ التي يكون من أجلها Z عددا حقيقيا موجبا .

ب- حدد قيم θ التي من أجلها Z تخليا صرفا.



ب- حدد قيم θ التي من أجلها Z تخليا صرفا.

4) نعتبر المعادلة (E) التالية :

$$(E)\ z\in C: z^3-ujz^2+u^2z-u^3j=0$$

أ- بين أن العدد $-iu$ حل للمعادلة (E) .

ب- حل المعادلة (E)

ج- بين أن صور حلول المعادلة (E) تنتمي إلى دائرة يجب تحديد مركزها و شعاعها.

## التمرين 65:

نعتبر المستوى منسوبا إلى م.م.م.م.

وليكن f التطبيق من C* نحو C بحيث : $f(Z)=\frac{\overline{Z}+i}{Z}$

1) حدد مجموعة النقط التي لحقها z يحقق : $|f(Z)|=1$

2 ) حل في C المعادلة : $f\left(\frac{1}{Z}\right)=Z\overline{Z}$

3) نضع : $Z=\cos\theta+i\sin\theta$ حيث : $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

أ- مثل النقط B, M,N, التي ألحاقها : $i$ , $z$ , $\overline{z}$ على التوالي .

ب- لتكن P النقطة التي لحقها $\overline{Z}+i$ .

تحقق من أن الرباعي ONPB معين .

و آستنتج عمدة $\overline{Z}+i$ ثم عمدة $f(z)$ بدلالة θ .

ج- حدد معيار $f(z)$ بدلالة θ.

## التمرين 66:

1)a- حل في C المعادلة $X^2-X+1=0$ ثم أكتب الجذرين على شكلهما المثلثي.

b- آستنتج حل النظمة في $C^2$ : $\begin{cases}x^3+y^3=1\\ x.y=1\end{cases}$

بحيث $\text{Im}\, y^3\le 0$ .

2) لتكن في C المعادلة $(E)z^3-3z-1=0$ و ليكن x و y عددي عقديين بحيث xy=1.

a- بين أن x+y جذر للمعادلة (E).

إذا وفقط إذاكان: $x^3+y^3=1$ .

b- أستنتج مما سبق أن حلول المعادلة (E)

## التمرين 67 :

n عدد صحيح طبيعي أكبر قطعا من1.

1 ) حدد على الشكل المثلثي الجذورالنونية لكل من : $u=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ و $v=\frac{1-i\sqrt{3i}}{2}$ .

2) حل في C المعادلة : $(1): z^{2n}-z^n+1=0$

3) أ- ليكن θ عددا حقيقيا يخالف $k2\pi$ لكل k من Z.بين أن : $\frac{\cos\theta+i\sin\theta+1}{\cos\theta+i\sin\theta-1}=-i\cot an\frac{\theta}{2}$

ب- حل في المعادلة $(2):\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n+\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=1$

ج- نعتبر في المستوى العقدي(P) النقطة A ذات اللحق1. بين أن مجموعة صور حلول المعادلة (2) , في (P) هي تقاطع المستقيمات (AM) مع محور الأراتيب حيث M تنتمي إلى مجموعة صور الجذور النونية للعددين u و v في المستوى P .

## التمرين 68 :

لتكن U مجموعة الأعداد العقدية التي معيارها1.

1) بين أنه لكل z من U :

$-1\le Re(z)\le 1$ و $-1\le Im(z)\le 1$

2) ليكن a و b عددين عقديين من U .

أ- بين أن : $\frac{(a+b)^2}{ab}=a\overline{b}+\overline{a}.b+2$

ب-أستنتج أن : $\frac{(a+b)^2}{ab}$ عدد حقيقي موجب .

3) ليكن $z_1$ و $z_2$ عقديين غير منعدمين. نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م.م,النقطتين $M_1$ و $M_2$ اللتين لحقهما على التوالي هما $z_1$ و $z_2$ .

و ليكن t لحق النقطة G مرجح النظمة المتزنة $\left\{\left(M_1;\frac{1}{|z_1|}\right),\left(M_2;\frac{1}{|z_2|}\right)\right\}$ نضع $a=\frac{z_1}{|z_1|}$ و $b=\frac{z_2}{|z_2|}$

أ-بين أن: $\frac{t^2}{z_1.z_2}=\frac{(a+b)^2}{ab}\times\frac{|z_1|\times|z_2|}{(|z_1|+|z_2|)^2}$ .

ب-نفترض أن: $a+b\neq 0$

بين أن (OG) هو حامل منصف $(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2})$ .

هي : $S=\left\{2\cos\frac{\pi}{9};2\cos\frac{7\pi}{9};2\cos\frac{13\pi}{9}\right\}$ .

cherifalix@hotmail.com
GSM :064865556

4) تطبيق : نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما 2+i و -2+11i

حدد معادلة ديكارتية لحامل منصف الزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ .